6) Systèmes du 2nd ordre

a) lieu de Bode

$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{\omega_0}p + 1}$$

Il faut distinguer 2 cas :

- $\xi \geq 1$

$$H(p) = \frac{K}{\left(1+\frac{p}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{p}{\omega_2}\right)} \qquad \text{avec } \omega_1 = -p_1 \qquad \omega_2 = -p_2$$

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$$

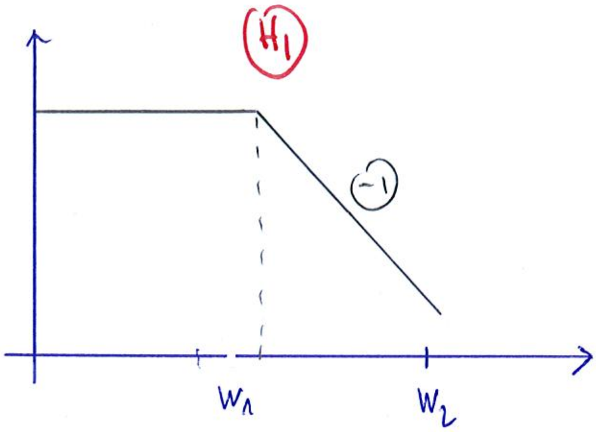
Nous avons 2 systèmes du 1er ordre $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$ en cascade et le diagramme de Bode se construit à partir des 2 tracés de Bode. $H_1(j\omega)$ et $H_2(j\omega)$ pris séparément, en les sommant à condition d'exprimer le module en dB

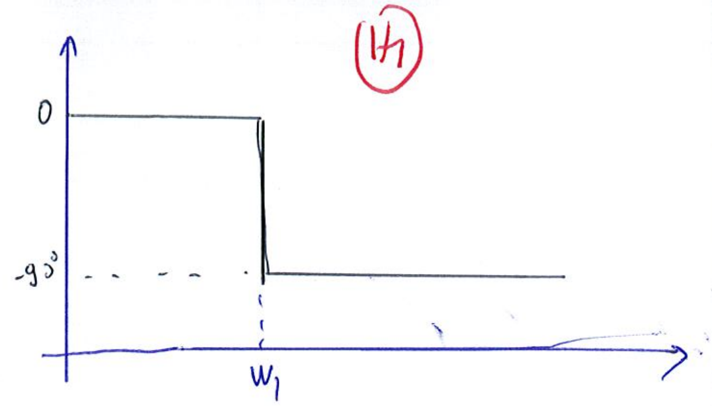
$$20\log_{10}[H(j\omega)] = 20\log_{10}[H_1(j\omega)\cdot H_2(j\omega)]$$

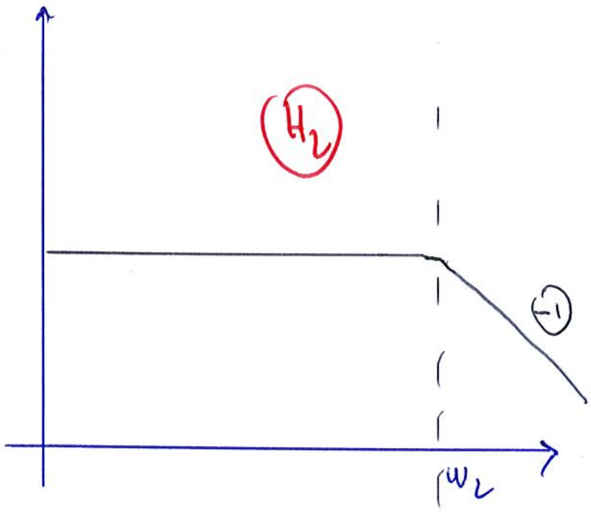
$$= 20\log_{10} H_1(j\omega) + 20\log_{10} H_2(j\omega)$$

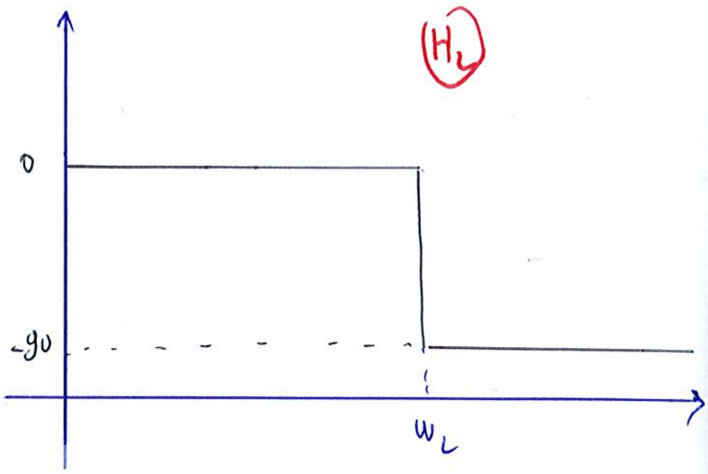
$$= |H_1(j\omega)|_{dB} + |H_2(j\omega)|_{dB}$$

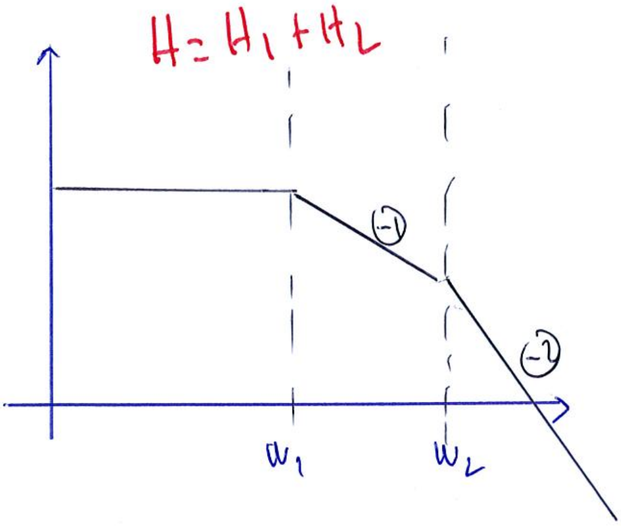
$$\mathrm{Arg}[H(j\omega)] = \mathrm{Arg}[H_1(j\omega)] + \mathrm{Arg}[H_2(j\omega)]$$

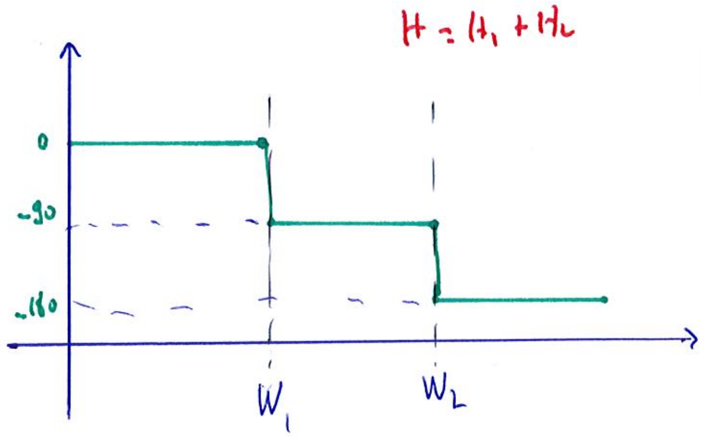

H1
-1
W1
W2


H1
0
-90°
W1


H2
-1
W2


H2
0
-90
W2


H = H1 + H2
-1
-2
W1
W2


H = H1 + H2
0
-90
-180
W1
W2

• $\xi < 1$

$$H(j\omega) = \frac{K}{\left(j\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)^2 + j\,2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) + 1}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{K}{\left(\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + 4\xi^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\mathrm{Arg}\left[H(j\omega)\right] = \varphi(\omega) = \begin{cases} -\arctan\left[\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right] & \text{si } 1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 > 0 \\ -\pi + \arctan\left[\dfrac{2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}{\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right|}\right] & \text{si } 1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 < 0 \end{cases}$$

<u>Rappel</u> : $z = a + ib$
$\arg z = \arctan\frac{b}{a}$ si $a > 0$
$\arg z = \pi + \arctan\frac{b}{a}$ si $a < 0$

Dans ce cas, le tracé du gain n'est pas une fonction strictement décroissante en ω

Calculons, les limites asymptotiques :

• en BF ($\omega \ll \omega_0$) $\Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = K \\ \mathrm{Arg}\left[H(j\omega)\right] = 0 \end{cases}$

• en HF $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = K\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \\ \mathrm{Arg}\left[H(j\omega)\right] = -\pi \end{cases}$

La pente en haute fréquence (HF) est $\boxed{p = -2}$. Même démarche que pour 1er ordre.

En ω_0, nous avons $\begin{cases} \varphi(\omega_0) = -90° \\ H(j\omega_0) = \dfrac{K}{2\xi} \end{cases}$

donc $|H(j\omega_0)| \geq K$ car $\xi < 1$

La courbe de gain à un maximum supérieur à K

$\rightarrow$ Nous parlons dans ce cas de résonance (ω_R)

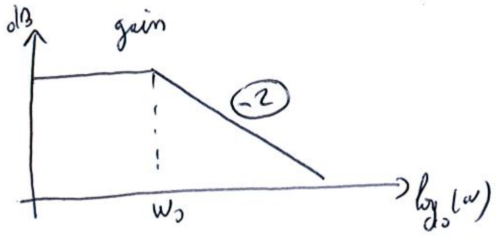
Après démonstration :

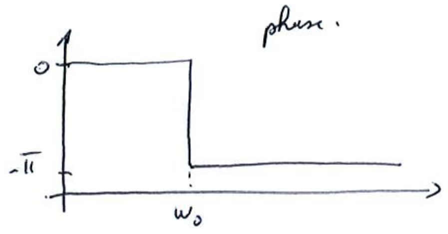
Il y a 2 sous-cas pour $\xi < 1$:

(1) Pour $\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$: le gain est une fonction décroissante en w.

Nous avons un lieu de Bode en gain dont l'allure ressemble à celle obtenue pour le cas $\xi \geq 1$.

Cependant, au lieu d'avoir 2 pulsations de brisure distinctes w_1 et w_2. On en a une seule en w_0.



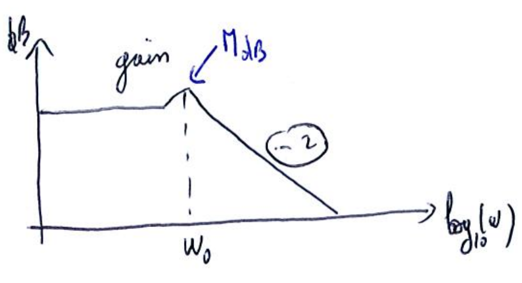


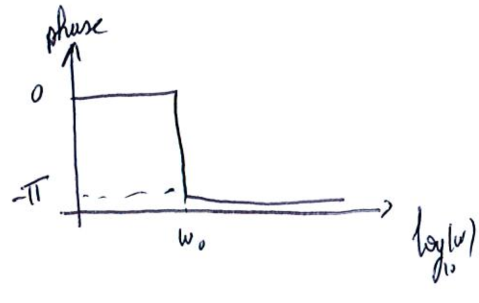
(2) Pour $0 \leqslant \xi \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ la courbe de gain présentera une résonance en w_R.

$w_R = w_0 \sqrt{1-2\xi^2}$

En reportant w_R dans l'expression du gain : la résonance $M = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

$\rightarrow$ M est inversement proportionnelle à ξ.





Caractéristiques fréquentielles (Admises)

	$\xi \geq 1$	$\frac{1}{\sqrt{2}} < \xi < 1$	$0 < \xi \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$
gain statique		K	
Résonance M	0	0	$\dfrac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$
ω_R	N.D	N.D	$\omega_0\sqrt{1-2\xi^2}$
ω_c	$\omega_0\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^2(\xi^2-1)+K^2}}$		nulle
BP	$\omega_0\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{4\xi^2(\xi^2-1)+2}}$		
Pente H.F		$p = -2$	
Phase en BF		0	
Phase en HF		-180 (degré)	