e) Systèmes du 2^{nd} ordre

def : Un système du 2^{nd} ordre est un système dont la fonction de transfert est :

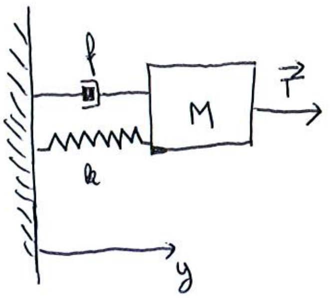
$$H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{w_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{w_0}p + 1}$$

K : gain statique

ξ = facteur d'amortissement

w_0 : pulsation propre du système

Exemple : Supposons une masse M, retenue à un mur par un amortisseur de coeff de frottement visqueux f et un ressort d'amortissement k, que l'on tire avec une tension T vers la droite



On peut mettre ce système en équations. On s'intéresse cette fois à la position du solide M : $y(t)$.

Les CI = 0 $\quad y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 0$

$$\Sigma \vec{F} = M\ddot{y}(t)$$

$$M\ddot{y}(t) + f\dot{y}(t) + ky(t) = T(t)$$

Dans le domaine de Laplace, on obtient :

$$\frac{Y(p)}{T(p)} = \frac{1}{Mp^2 + fp + k} \implies H(p) = \frac{K}{\left(\frac{p}{w_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{w_0}p + 1}$$

Par identification : $K = \frac{1}{k}$ $\quad w_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ $\quad \xi = \frac{f}{2\sqrt{kM}}$

1°) Réponse indicielle des systèmes du 2nd ordre

On doit distinguer 2 cas selon que les racines du dénominateur $H(p)$ sont réelles ou complexes.

Calculons Δ : $\boxed{\Delta = \frac{4}{w_0^2}\left(\xi^2 - 1\right)}$

(1) $\xi \geq 1$ les 2 racines sont réelles et simples :

$$p_{1/2} = \left(-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}\right) w_0$$

(2) $\xi < 1$ les 2 racines sont complexes conjuguées :

$$p_{1/2} = \left(-\xi \pm j\sqrt{1 - \xi^2}\right) w_0$$

Etudions en détail ces 2 cas :

(1) $\xi \geq 1$ $\Rightarrow$ $H(p) = \dfrac{K w_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)}$

Rappel : $\Delta \neq 0$ $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

La TL de la réponse indicielle est :

$$S(p) = \frac{K w_0^2}{(p - p_1)(p - p_2)} \times \frac{1}{p} = K w_0^2 \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{p - p_1} + \frac{C}{p - p_2}\right]$$

$$\boxed{s(t) = K\left[1 - \frac{1 + \alpha}{2} e^{+At} - \frac{1 - \alpha}{2} e^{Bt}\right]}$$

$$\boxed{\text{avec } \alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 - 1}} \; ; \; A = \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) w_0 \; ; \; B = -\left(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right) w_0}$$

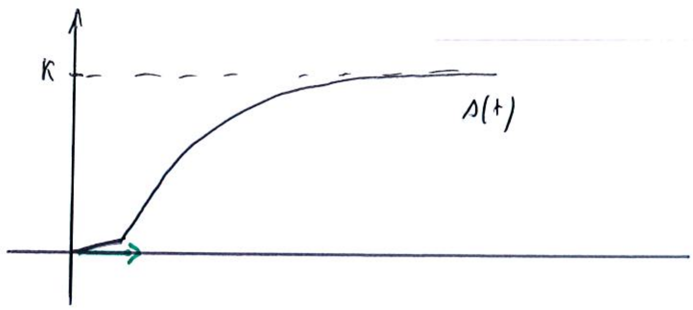
$$\dot{s}(t) = \frac{K}{2}\left[(1+\alpha) A e^{At} + (1-\alpha) B e^{Bt}\right]$$

$s(0) = 0$ et $s(\infty) = K$ $\Rightarrow$ les limites sont connues.

$\dot{s}(0) = 0$ et $\dot{s}(\infty) = 0$ $\Rightarrow$ les pentes à l'origine et à l'infini sont connues.

On constate que $\dot{s}(t)$ ne peut s'annuler que pour $t=0$ et $t \to \infty$. La courbe ne présente donc pas de maximum local.

Par contre, on a une tangente à l'origine horizontale ce qui diffère du système du 1^{er} ordre.



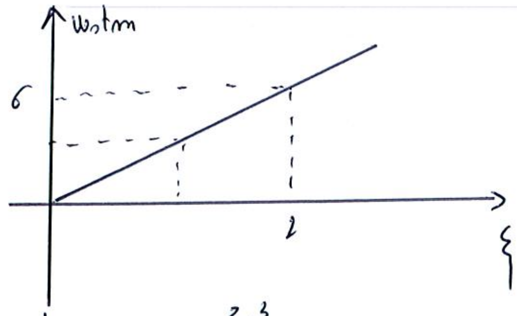
Les différentes caractéristiques du transitoire sont pour un système du 2^{d} ordre avec $\xi > 1$:

(1) Il n'y a pas de dépassement.

(2) T_m n'est pas défini.

(3) Temps de montée t_m est évalué en utilisant un ABAQUE.

On a une courbe $\omega_0 t_m = f(\xi)$.



(4) $t_{r\,10\%} = \dfrac{2,3}{\omega_0\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}$

$t_{r\,5\%} = \dfrac{3}{\omega_0\left(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right)}$

(2) $\xi < 1$

Les racines du dénominateur sont complexes conjugués

$$S(p) = \frac{K\omega_0^2}{p(p-p_1)(p-\bar{p}_1)} = K\omega_0^2 \left[\frac{A}{p} + \frac{B}{p-p_1} + \frac{C}{p-\bar{p}_1} \right]$$

$$\Rightarrow s(t) = K\left[1 - \frac{1+j\alpha}{2} e^{At} - \frac{1+j\alpha}{2} e^{Bt}\right]$$

avec $\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$; $A = \left(-\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$; $B = -\left(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right)\omega_0$

Cherchons l'allure de la réponse indicielle $\rightarrow$ on calcule $s(t)$ et $\dot{s}(t)$

$$\dot{s}(t) = -\frac{K}{2}\left[(1-j\alpha) A e^{At} + (j\alpha+1) B e^{Bt}\right]$$

$$\Rightarrow \dot{s}(t) = -j \frac{K\omega_0}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_0 t} \sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$$

$s(0) = 0$ $\quad s(\infty) = K$ $\Rightarrow$ les limites existes et sont connues.

$\dot{s}(0) = 0$ $\quad \dot{s}(\infty) = 0$ $\Rightarrow$ les pentes à l'origine et à l'infini sont connues.

$\dot{s}(t)$ peut s'annuler à plusieurs reprises à cause de la fonction $\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t\right)$.

Si on pose $\beta = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

On a $\dot{s}(t) = 0$ $\forall t$ tq $\beta t = k\pi$ où k est un entier

$$\beta t = k\pi \Leftrightarrow \omega_0\sqrt{1-\xi^2}\, t_k = k\pi$$

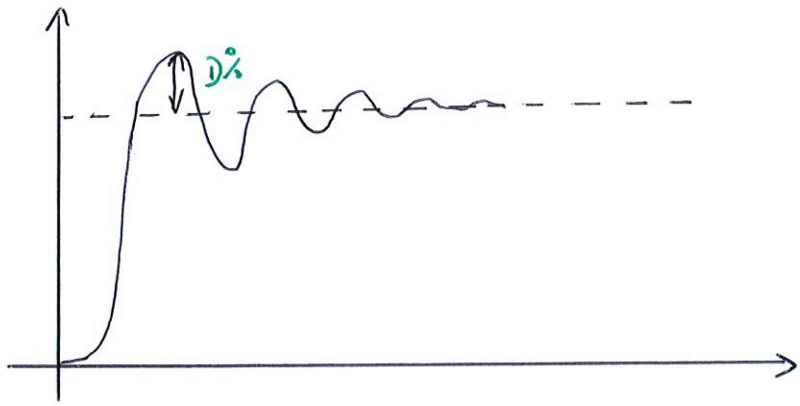
$$\boxed{t_k = \frac{k\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$

On a donc un phénomène nouveau : la sortie présente une suite d'extrema espacés périodiquement et qui oscille.

(1) $D\% = \left(100 \times e^{-\left(\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}\right)\%$ (2) $T_m = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$

$$D = K e^{-\left(\frac{\pi \xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$$

La réponse indicielle d'un système du 2^{nd} ordre si $\xi < 1$ présente un dépassement



$s(t)$ présente des maxima et minima régulièrement espacés. On dit alors que le système présente une réponse indicielle pseudo périodique :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$$

$\Rightarrow$ pseudo pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T} = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$

(3) le temps t_m est donné par un ABAQUE

(4) le temps de réponse à 5% et 10% :

$$t_{r\,10\%} = -\frac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(0{,}1\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$t_{r\,5\%} = -\frac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(0{,}05\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

Synthèse : $H(p) = \dfrac{\omega_0^2}{p^2 + 2\xi\omega_0 p + \omega_0^2}$

	$\xi < 1$	$\xi \geq 1$
dépassement $D\%$	$100 \times e^{-\left(\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)}$ %	0
T_m	$\dfrac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}$	N.D
t_m	ABAQUE	ABAQUE
$t_{r\,10\%}$	$-\dfrac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(0{,}1\sqrt{1-\xi^2}\right)$	$\dfrac{2{,}3}{\omega_0\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}$
$t_{r\,5\%}$	$-\dfrac{1}{\xi\omega_0}\ln\left(0{,}05\sqrt{1-\xi^2}\right)$	$\dfrac{3}{\omega_0\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)}$