Chap 3 : Etude de systèmes standard

I) Réponses temporelles

a) définition

La réponse temporelle d'un système est constituée de deux parties :

(1) la réponse transitoire

(2) le régime permanent

La réponse transitoire caractérise les propriétés de réaction d'un système lorsqu'on lui applique un signal d'entrée alors qu'il était au repos (ou lorsque l'entrée est modifiée)

Cette réponse voit son influence décroitre au fur et à mesure que le temps augmente. Une fois le régime transitoire évanoui, on passe au régime permanent.

L'amplitude du signal observée pendant le transitoire ainsi que la durée du transitoire sont 2 facteurs de performance des systèmes étudiés.

Le régime permanent nous intéresse autant que le régime transitoire.

b) Signaux tests

On distingue 2 familles de signaux d'entrée :

(1) les signaux sinusoïdaux : $A \sin(\omega t + \varphi)$; $A \cos(\omega t + \varphi)$; $A e^{j\omega t + \varphi}$

→ analyse fréquentielle du système.

(2) les signaux polynomiaux :

→ mise en évidence de caractéristiques temporelles

ex $u(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \dots + \alpha_m t^m$ pour $t \geq 0$

on distingue les cas particuliers suivants :

(1) $u(t) = \alpha_0$ pour $t \geq 0$ échelon causal d'amplitude α.

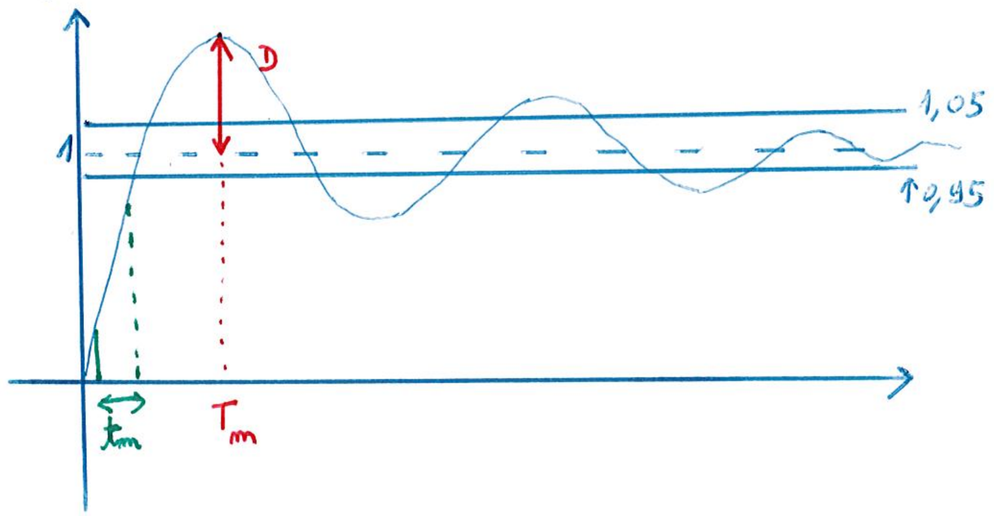
(2) $u(t) = \alpha_1 t$ ——— rampe causale de pente α_1

(3) $u(t) = \alpha_2 t^2$ ——— parabole causale

c) Réponse indicielle

La réponse d'un système à un échelon est appelée réponse indicielle

Elle permet la caractérisation complète du régime transitoire



Données caractéristiques

(1) dépassement (D ou D%)

Si s_{max} est la valeur maximale prise par $s(t)$ et si s_{fin} est la valeur finale

$$D = s_{max} - s_{min}$$

$$D\% = \left(\frac{s_{max} - s_{fin}}{s_{fin}} \times 100\right)$$

→ Indicateur important de la stabilité du système.

Ex un dépassement de 50% est rarement souhaitable en robotique

(2) Temps du premier maximum (T_m)

T_m ne présente pas toujours le dépassement maximum

(3) Temps de montée (t_m)

est le temps nécessaire au système pour que sa sortie passe de 10% à 90% de sa valeur finale s_{fin}

(4) Temps d'établissement à $x\%$ ($t_{rx\%}$)

Le temps d'établissement à $x\%$ (ou encore temps de réponse à $x\%$) est le temps nécessaire pour que la réponse indicielle demeure dans la fourchette $\pm x\%$ autour de la valeur finale s_{fin} :

$$\boxed{|s(t) - s_{fin}| \leq x\% \times s_{fin}}$$

Généralement $x\% = 10\%$ ou 5%

Ces 4 quantités permettent de caractériser le comportement transitoire (en réponse indicielle) d'un système. Si elles sont assez facilement mesurable en pratique, leurs expressions analytiques ne sont pas toujours évidentes à établir.

d) Systèmes du 1er ordre

def: On considère comme système du 1er ordre tout système dont la fonction de transfert peut se mettre sous :

$$H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

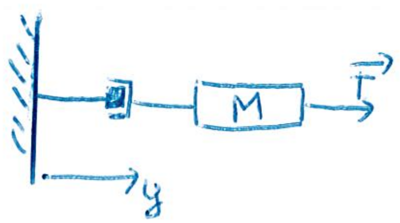
K : gain statique

τ : constante de temps du système

$K>0 \quad \tau>0$

Exercice :

supposons une masse M, retenue à un mur par un amortisseur de coeff de frottement visqueux f, que l'on tire avec une tension T vers la droite



On considère que le déplacement de M est mesuré par la variable y et que l'on s'intéresse uniquement à la vitesse du solide, $v(t) = \dot{y}(t)$.

On a : $\Sigma \vec{F} = M \overrightarrow{\ddot{y}(t)}$

$$T(t) - f\dot{y}(t) = M\ddot{y}(t)$$
$$T(t) - f v(t) = M\dot{v}(t)$$

Trouver la fonction de transfert du système

Dans le domaine de Laplace :

$$T(p) - f\,V(p) = M\,p\,V(p)$$

$$V(p) = \frac{1/f}{1 + \frac{M}{f}\,p}\,T(p)$$

$$\Rightarrow H(p) = \frac{V(p)}{T(p)} = \frac{K}{1+\tau p} \qquad \text{avec } K = 1/f \qquad \tau = M/f$$

(1) Réponse indicielle d'un système du 1er ordre.

$$E(p) \longrightarrow \boxed{H(p)} \longrightarrow S(p) \qquad H(p) = \frac{K}{1+\tau p}$$

$$\Leftrightarrow \; S(p) = H(p)\,E(p)$$

On cherche à caractériser la réponse indicielle de ce système

Par définition $e(t) = 1$

$$TL[e(t)] = \frac{1}{p}$$

$$S(p) = \frac{K}{p(1+\tau p)} = K\left(\frac{A}{p} + \frac{B}{1+\tau p}\right)$$

$$\left.\begin{aligned} A &= 1 \\ B &= -\tau \end{aligned}\right\} \Rightarrow S(p) = K\left(\frac{1}{p} + \frac{-\tau}{1+\tau p}\right) = K\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\frac{1}{\tau} + p}\right)$$

On sait que $TL[e^{-at}] = \frac{1}{p+a}$ donc $\frac{1}{1/\tau + p} \rightsquigarrow e^{-t/\tau}$

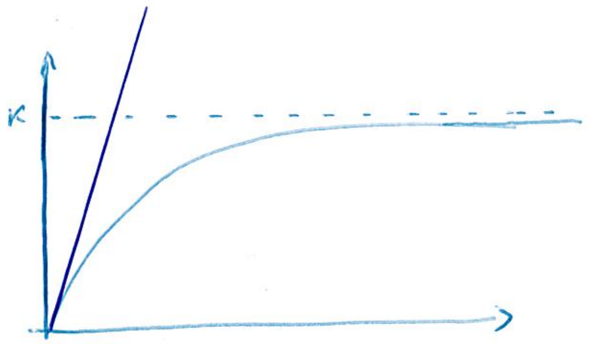
$$\boxed{s(t) = K\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

Nous pouvons tracer ce signal afin de visualiser la réponse indicielle.

En général, on s'intéresse à l'allure de la courbe. on utilise la démarche suivante :

$s(0) = 0 \qquad s(\infty) = K$ $\Rightarrow$ les limites sont connues

$\dot{s}(t) = \frac{K}{\tau} e^{-t/\tau} \qquad \dot{s}(0) = \frac{K}{\tau}$ $\rightarrow$ la pente à l'origine est connue.



<u>On peut retrouver les différentes caractéristiques du transitoire</u> :

(1) Il n'y a pas de dépassement car $s_{max} = s_{fin}$

$D\% = 0$

(2) Par conséquent, T_m n'est pas définie

> La réponse indicielle d'un système du 1^{er} ordre ne présente pas de dépassement.

(3) le temps de montée :

Soit t_1 le temps pour lequel $s(t_1) = 10\% \times s_{fin}$

— t_2 ——— $s(t_2) = 90\% \times s_{fin}$

$s_{fin} = K$

$s(t_1) = 0,1K = K\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right) \Rightarrow e^{-t_1/\tau} = 0,9 \Rightarrow -\frac{t_1}{\tau} = \ln 0,9$

$t_1 = -\tau \ln(0,9)$

Idem : $t_2 = -\tau \ln(0,1)$

$\Rightarrow \boxed{t_m = t_2 - t_1 = \tau \ln 9 \approx 2,2\tau}$

(4) le temps de réponse à 10%

$$s(t_r) = 0{,}9K = K\left(1 - e^{-t_r/\tau}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} t_{r\,10\%} &= -\tau \ln(0{,}1) \simeq 2{,}3\,\tau \\ t_{r\,5\%} &= -\tau \ln(0{,}05) \simeq 3\,\tau \end{aligned}}$$

Rm: les caractéristiques de ce système ne dépendent pas de l'amplitude de l'échelon mais uniquement de la constante de temps τ du système.

Exercice à faire à la maison :

Tracer l'allure de la courbe