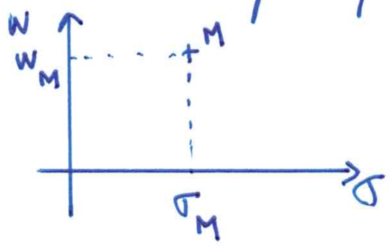
Chap 1 : Rappel Mathématique.

0) Fonctions de la variable complexe p

définition : Une variable complexe p est de la forme $p = \sigma + jw$



$$M = \begin{pmatrix} \sigma_M \\ w_M \end{pmatrix}$$

Une fonction $G(p)$ est une fonction de la variable complexe p si pour chaque valeur de p, on a au moins une valeur de $G(p)$.

$$G(p) = Re[G(p)] + j\, Im[G(p)]$$

Ex : $G(p) = p + 3$ $\quad G(p) = (\sigma + 3) + jw$

on a alors $Re[G(p)] = \sigma + 3$

$Im[G(p)] = w$

I) Transformée de Laplace

La transformation de Laplace (Pierre-Simon de Laplace 1749-1827) est l'un des outils les plus importants de l'automatique dit continue. Il permet en effet la résolution dans le domaine fréquentiel, de problèmes posés dans le domaine temporel.

Elle permet la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants.

a) définition

La transformée de Laplace d'une fonction $x(t)$ est donnée si elle existe par :

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, dt$$

où p variable de Laplace définie dans le plan complexe $p = \sigma + j\omega$

Exercice 1 :

Echelon unité : $x(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

Exercice 2 :

Rampe causale : $x(t) = \begin{cases} t & \text{pour } t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$

b) propriété de TL

(1) Linéarité : $\alpha x(t) + \beta y(t) \xrightarrow{TL} \alpha X(p) + \beta Y(p)$

(2) Multiplication par un scalaire $x(\alpha t) \xrightarrow{TL} \frac{1}{|\alpha|} X\left(\frac{p}{\alpha}\right)$

(3) Translation temporelle : $x(t-\tau) \xrightarrow{TL} X(p)\, e^{-\tau p}$

$x(t+\tau) \xrightarrow{TL} X(p)\, e^{\tau p}$

(4) Multiplication par t : $t\, x(t) \xrightarrow{TL} -\frac{dX(p)}{dp}$

(5) Multiplication par une exponentielle : $e^{-\alpha t} x(t) \xrightarrow{TL} X(p+\alpha)$

(6) Multiplication de 2 signaux temporelles :

$$x(t)\,y(t) \xrightarrow{TL} X(p) \circledast Y(p)$$

(7) convolution de 2 signaux temporelles :

$$x(t) \circledast y(t) \xrightarrow{TL} X(p) \cdot Y(p)$$

(8) Dérivation : $\dfrac{dx(t)}{dt} \xrightarrow{TL} pX(p) - x(0^+)$

$$\boxed{\frac{d^m x(t)}{dt^m} \xrightarrow{TL} p^m X(p) - p^{m-1} x(0^+) - p^{m-2} \dot{x}(0^+) - \cdots - \cdots - p\,x^{(m-2)}(0^+) - x^{(m-1)}(0^+)}$$

(9) Intégration : $\displaystyle\int_0^t x(u)\,du \xrightarrow{TL} \frac{X(p)}{p}$

(10) Théorème de la valeur finale :

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \lim_{p \to 0} p\,X(p)$$

II) Transformée de Laplace inverse

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \lim_{R \to \infty} \int_{\sigma - jR}^{\sigma + jR} X(p)\, e^{pt}\, dp$$

En pratique, on préfèrera décomposer la fonction $X(p)$ en "éléments simples" et on utilise les tables de transformée pour retrouver l'original $x(t)$.

Exercice :

Calculer la transformation inverse de :

$$X(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p\,(p^2 + 5p + 6)}$$

$$X(p) = \frac{2p^2 + 12p + 6}{p\,(p+2)(p+3)}$$

Méthode

1° On peut alors décomposer en une somme de fractions rationnelles élémentaires de type $\frac{A}{p+a}$

2° Ensuite, on se reporte à la table des transformées de Laplace usuelles.

$$\frac{A}{p+a} \xrightarrow{TL^{-1}} A\, e^{-at}$$

$$X(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+3}$$

On peut trouver les A, B, C en mettant X(p) sur le même dénominateur et ensuite par identification.

Sinon on peut faire comme suit :

$$A = p\,X(p)\Big|_{p=0} = 1$$

$$B = (p+2)\,X(p)\Big|_{p=-2} = 5$$

$$C = (p+3)\,X(p)\Big|_{p=-3} = \frac{-12}{3} = -4$$

$$X(p) = \frac{1}{p} + \frac{5}{p+2} - \frac{4}{p+3}$$

$$\frac{1}{p} \xrightarrow{TL^{-1}} 1$$

$$\frac{1}{p+2} \xrightarrow{TL^{-1}} e^{-2t}$$

$$\frac{1}{p+3} \xrightarrow{TL^{-1}} e^{-3t}$$

donc $\boxed{x(t) = 1 + 5e^{-2t} - 4e^{-3t}}$

III) Résolution d'équations différentielles par Laplace

$$\ddot{y} + \dot{y} - 6y = 12t + 20$$

On note $y(0)$ et $\dot{y}(0)$ les CI (conditions initiales)

$$\boxed{\text{On sait que } \frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TL} p^n X(p) - p^{n-1}x(0^+) - p^{n-2}\dot{x}(0^+) - \dots - p\, x^{(n-2)}(0^+) - x^{(n-1)}(0^+)}$$

Méthode :

1°) On prend la transformée de Laplace de chacun des termes :

$$\left[p^2 Y(p) - p\,y(0) - \dot{y}(0)\right] + \left[p\,Y(p) - y(0)\right] - 6\,Y(p) = \frac{12}{p^2} + \frac{20}{p}$$

$$Y(p)\left[p^2 + p - 6\right] - \dot{y}(0) - y(0)(p+1) = \frac{12 + 20p}{p^2}$$

$$Y(p) = \frac{12 + 20p + p^2\left[\dot{y}(0) + y(0)\right] + p^3 y(0)}{p^2\left[p^2 + p - 6\right]}$$

$$Y(p) =$$

2°) Décomposition en éléments simple

$$Y(p) = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p-2} + \frac{D}{p+3}$$

On trouve $A = -2$; $B = -\frac{11}{3}$; $C = \frac{13}{5} + \frac{3}{5}\left(y(0) + \frac{1}{5}\dot{y}(0)\right)$

$$D = \frac{16}{15} + \frac{2}{5}y(0) - \frac{1}{5}\dot{y}(0)$$

3°) On utilise la transformation inverse (table des transformées)

$$\boxed{y(t) = -2t - \frac{11}{3} + \left[\frac{13}{5} + 3\,y(0) + \frac{1}{5}\dot{y}(0)\right]e^{2t} + \left[\frac{16}{5} + \frac{2}{5}y(0) - \frac{1}{5}\dot{y}(0)\right]e^{-3t}}$$